

Un enseignement au numérique pour notre académie : Le GPS

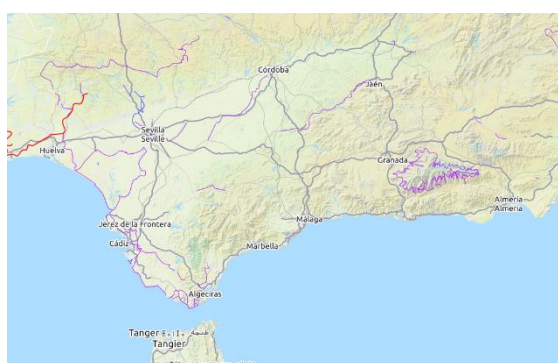
Un GPS pour découvrir l'Andalousie

Jean-Alain Roddier

IA-IPR de mathématiques

Quoi de plus constructif que de découvrir une contrée nouvelle tout en parcourant la notion de graphe. Nous utilisons à séant le verbe **parcourir** car il y a dans cet article non seulement la notion de graphe mais aussi celle qui consiste – une fois ce graphe produit – à le parcourir.

Tout comme notre grande région Auvergne-Rhône-Alpes compte douze départements, l'Andalousie est constituée de huit provinces : Almería (A), Cadix (Ca), Cordoba (Co), Granada (G), Huelva (H), Jaen (J), Malaga (M), Sevilla (S). Ces huit provinces portent pour chacune d'entre elles le nom de leur capitale provinciale, d'ailleurs une personne qui vit au centre-ville de Malaga dira : « Vivo en Malaga capital ! ».



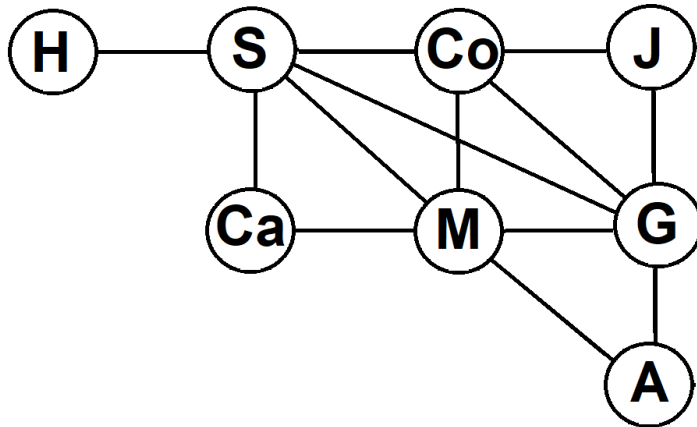
Source : site openstreetmap.org. Carte sous licence CC-BY-SA © les contributeurs d'Openstreetmap

Qu'est-ce qu'un graphe ?

Nous pouvons pour nous représenter les huit provinces andalouses avoir à l'esprit la carte géographique ci-contre qui donne le tracé des grandes routes de cette belle région. Si l'on s'attache à présent uniquement à savoir de combien de kilomètres ces villes sont distantes, **un graphe** suffira à ce que nous puissions à tout moment avoir cette information.

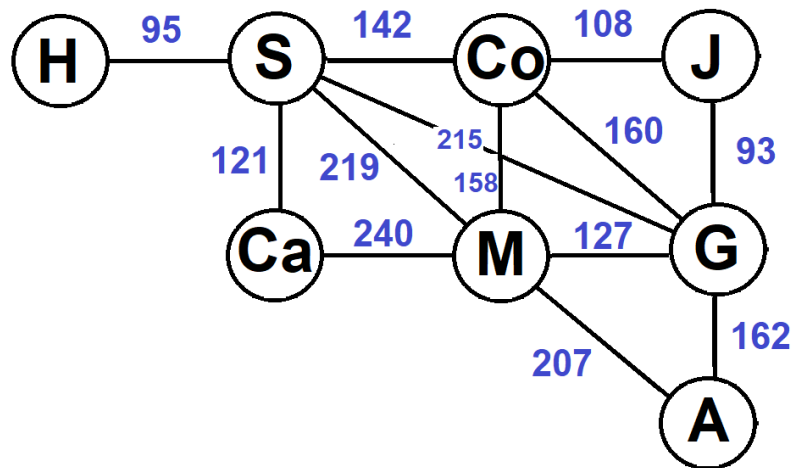


Source : site openstreetmap.org. Carte sous licence CC-BY-SA © les contributeurs d'Openstreetmap



Un graphe est par définition un schéma constitué de sommets et de liens entre ces sommets. Pour représenter ainsi notre chère Andalousie sous la forme d'un graphe, nous allons prendre comme sommets les capitales régionales et comme liens les routes tracées sous forme de segments. Le graphe au sens étymologique du terme est un mot

tiré du grec γράφειν, écrire, décrire ; il s'agit bien ici non pas d'avoir l'image fidèle de notre carte mais d'en conserver une description plus ou moins sommaire avec l'idée de garder uniquement ce qui nous intéresse.



Si l'on ajoute à présent les distances en kilomètres, nous obtenons ce que l'on appelle **un graphe pondéré**.

La théorie des graphes

Les graphes sont importants pour – entre autres – trois raisons :

- un graphe rend directement compte d'un ensemble de données et du lien qui existe entre ces données ;
- un graphe est précieux au moment de conserver des données. La plupart des langages informatiques permettent de définir des graphes et donc de les enregistrer ;
- un graphe peut être exploité ou subir différents traitements. Ces exploitations et traitements sont programmables et peuvent être réalisés par un ordinateur.

Les graphes forment un ensemble essentiel des sciences informatiques, il existe d'ailleurs une théorie qui permet de les étudier que l'on appelle **la théorie des graphes**.

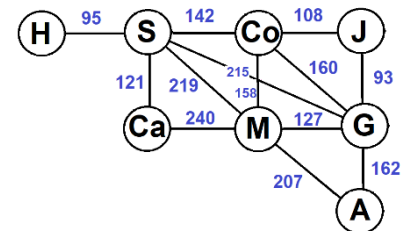
L'algorithme de Dijkstra

Parmi les différentes exploitations que l'on peut faire d'un graphe, l'**algorithme de Dijkstra** est un algorithme classique qui appliqué à un arbre pondéré – comme notre graphe de l'Andalousie – renvoie la distance minimale entre deux sommets donnés du graphe. Cet algorithme est – entre autres – utilisé par nos GPS. Un GPS est en effet un outil technologique qui non seulement reçoit notre position géographique à l'aide d'une transmission satellitaire assez complexe mais qui arrive aussi à partir d'une base de données des coordonnées de très nombreux points du globe à nous fournir le chemin qui répond aux critères que nous choisissons.

Plus court chemin pour aller de Almería à Huelva

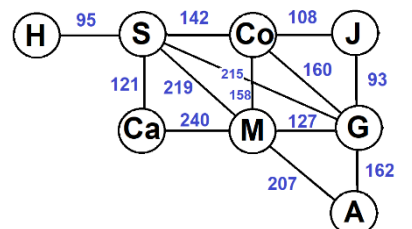
Afin de rendre nos propos plus concrets, nous allons appliquer l'algorithme de Dijkstra à notre graphe de l'Andalousie afin de déterminer le plus court chemin pour aller de Almería à Huelva (en s'imposant de passer uniquement par des capitales régionales). L'algorithme de Dijkstra se déroule en construisant un tableau que l'on produit ligne après ligne.

- 1) Au départ, le tableau (voir ci-dessous) contient uniquement deux lignes : la ligne qui porte le nom de chaque colonne et la ligne qui met en exergue notre point de départ et qui précise pour l'instant que lorsque **l'on est à Almería**. Nous n'avons pas encore bougé et ainsi nous ne pouvons pas accéder tout de suite aux autres villes (on marque le symbole ∞).



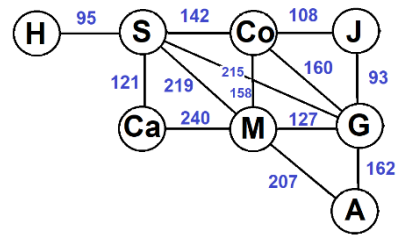
A	Ca	Co	G	H	J	M	S
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

- 2) Lorsque **l'on part de Almería**, on peut accéder uniquement soit à Granada soit à Malaga. Les autres villes ne sont pour l'instant pas directement accessibles à partir d' Almería. Dans le tableau ci-dessous, on marque en gras la distance minimale pour arriver à Granada et l'on grise toutes les autres cases de la colonne G car c'est la plus petite valeur sur cette ligne.



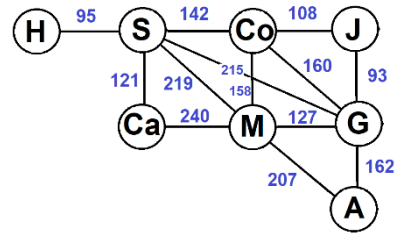
A	Ca	Co	G	H	J	M	S
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	∞	∞	162_A	∞	∞	207 _A	∞

3) Lorsque l'on part de Granada, on peut accéder directement soit à Almería (mais on ne va pas faire machine arrière), soit à Jaen (il nous faut ajouter 93 km), soit à Malaga (mais cela donnerait en tout 289 km qui est nettement supérieur à 207 km nécessaire pour venir directement d'Almería), soit à Cordoba (il nous faut ajouter 160 km, ce qui donne au total 322 km), soit à Sevilla (il nous faut ajouter 215 km). Les autres villes ne sont pour l'instant pas directement accessibles à partir de Granada. On marque en gras la plus petite valeur de la ligne (avec en indice la provenance) et l'on grise toutes les autres cases de la colonne M.



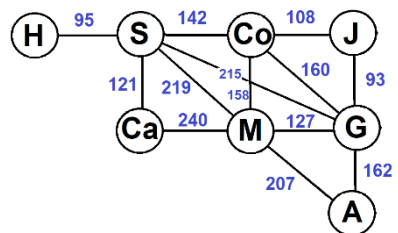
A	Ca	Co	G	H	J	M	S
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	∞	∞	162_A	∞	∞	207 _A	∞
	∞	322 _G		∞	255 _G	207_A	377 _G

4) Lorsque l'on part de Malaga, on peut accéder directement soit à Granada (mais à présent la case de cette nouvelle ligne de la colonne G est grisée), soit à Cordoba (il nous faudrait ajouter 158 km ce qui donnerait 365 km nettement supérieur aux 322 km que l'on va conserver), soit à Cadiz (il nous faut ajouter 240 km ce qui donne 447 km), soit à Cordoba (il nous faut ajouter 158 km, ce qui donne au total 365 km qui est supérieur à 322 km), soit à Sevilla (il nous suffit d'ajouter 219 km, on obtient 426 km qui est supérieur à 377 km que l'on garde). Les autres villes ne sont pour l'instant pas directement accessibles à partir de Malaga. On marque en gras la plus petite valeur de la ligne (avec en indice la provenance) et l'on grise toutes les autres cases de la colonne J.



A	Ca	Co	G	H	J	M	S
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	∞	∞	162_A	∞	∞	207 _A	∞
	∞	322 _G		∞	255 _G	207_A	377 _G
	447 _M	322 _G		∞	255_G		377 _G

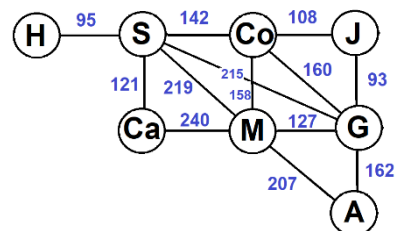
5) Lorsque l'on part de Jaen, on peut accéder directement soit à Granada (mais à présent la case de cette nouvelle ligne de la colonne G est grisée), soit à Cordoba (il nous faudrait ajouter 108 km ce qui donnerait 363 km qui est supérieur aux 322 km que l'on va conserver). Les autres villes ne sont pour



l'instant pas directement accessibles à partir de Jaen. On marque en gras la plus petite valeur 322 de la ligne (avec l'indice de la provenance) et l'on grise toutes les autres cases de la colonne Co.

A	Ca	Co	G	H	J	M	S
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	∞	∞	162_A	∞	∞	207 _A	∞
	∞	322 _G		∞	255 _G	207_A	377 _G
	447 _M	322 _G		∞	255_G		377 _G
	447 _M	322_G		∞			377 _G

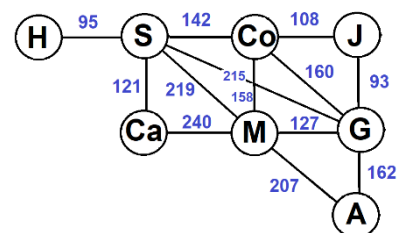
- 6) Lorsque l'on part de Cordoba, on peut accéder directement soit à Jaen (mais à présent la case de cette nouvelle ligne de la colonne J est grisée), soit à Granada (idem), soit à Malaga (idem), soit à Sevilla (il nous suffit d'ajouter 142 km, on obtient 464 km qui est supérieur à 377 km). La ville de Huelva



n'est toujours pas accessible. On marque en gras la plus petite valeur 377 de cette ligne (avec l'indice de la provenance) et l'on grise toutes les autres cases de la colonne S.

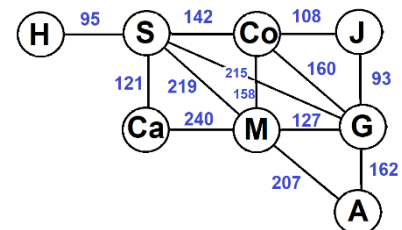
A	Ca	Co	G	H	J	M	S
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	∞	∞	162_A	∞	∞	207 _A	∞
	∞	322 _G		∞	255 _G	207_A	377 _G
	447 _M	322 _G		∞	255_G		377 _G
	447 _M	322_G		∞			377 _G
	447 _M			∞			377_G

- 7) Lorsque l'on part de Sevilla, on peut accéder à Huelva en ajoutant 95 km, à Cadiz (en ajoutant 121 km, on obtient 498 km qui est supérieur à 447 km que l'on va conserver). On marque en gras la plus petite valeur 447 de cette ligne (avec l'indice de la provenance) et l'on grise toutes les autres cases de la colonne Ca.



A	Ca	Co	G	H	J	M	S
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	∞	∞	162_A	∞	∞	207 _A	∞
	∞	322 _G		∞	255 _G	207_A	377 _G
	447 _M	322 _G		∞	255_G		377 _G
	447 _M	363_J		∞			377 _G
	447 _M			∞			377_G
	447_M			472 _S			

- 8) Lorsque l'on part de Cadiz, on ne peut plus aller nulle part car toutes les cases sont grises. On marque en gras la plus petite valeur 472 de cette ligne (avec l'indice de la provenance).



A	Ca	Co	G	H	J	M	S
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	∞	∞	162_A	∞	∞	207 _A	∞
	∞	322 _G		∞	255 _G	207_A	377 _G
	447 _M	322 _G		∞	255_G		377 _G
	447 _M	363_J		∞			377 _G
	447 _M			∞			377_G
	447_M			472 _S			
				472_S			

Sur cette dernière ligne, la valeur 472 avec l'indice S de la colonne H est marquée en gras : c'est fini.

Le trajet qui minimise la distance Almería -Huelva est donc celui qui arrive à Huelva en venant de Sevilla, qui arrive à Sevilla en venant de Granada et qui arrive à Granada en venant d'Almería. C'est donc le trajet **Almería – Granada – Sevilla - Huelva**.

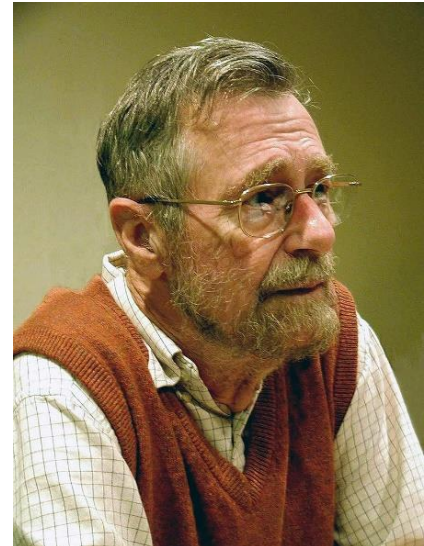
Vous nous direz : « Tout cela pour cela ! Car si je regarde la carte, je vois bien que c'est le chemin le plus court. » et bien l'essentiel dans tout ce que nous venons de faire du début à la fin c'est que **nous n'avons jamais regardé la carte, seul le graphe nous a suffi**.

Qui plus est, si l'on observe les couleurs utilisées pour surligner le texte dans chacun des paragraphes 1) à 8), les séquences d'instructions sont répétitives ; en d'autres termes, on applique le même processus lorsque l'on part d' Almería, lorsque l'on part

de Granada, puis lorsque l'on part de Malaga, etc. On a parcouru ce que l'on appelle une boucle informatique c'est-à-dire un ensemble d'instructions identiques.

Un algorithme « simple »

On dit souvent que : « De nombreux algorithmes sont issus de mathématiques relativement pauvres », l'algorithme de Dijkstra en est un exemple. Pour autant, il ne faut bien avoir à l'esprit qu'à l'heure d'améliorer l'algorithme afin qu'il intègre par exemple plusieurs paramètres (prix des péages d'autoroute, conditions de trafic en temps réel, relief des routes, sinuosité de la route, etc), les mathématiques sous-jacentes sont relativement complexes. À l'image de Edsger Wybe Dijkstra concepteur de l'algorithme que nous venons de décrire, **la double compétence mathématicien - informaticien est souvent convoquée pour pouvoir contribuer à l'innovation du monde numérique qui nous entoure.**



Edsger Wybe Dijkstra (1930,2002)

Source : Wikipédia Creative Commons

Auteur de la photographie : Hamilton Richards

Je remercie vivement **Monsieur Sylvain FAURE** et **Monsieur Philippe LAC** pour leurs précieuses relectures ainsi que mon collègue Nicolas ROCHER IA-IPR d'Histoire et Géographie pour son aide dans la recherche de cartes de l'Andalousie. Il me faut aussi remercier **Madame Lynda JONNON** du service des Affaires juridiques du Rectorat qui m'a permis de rendre conforme au droit l'insertion des documents dans ce texte. En résumé, il s'agit bien ici d'un travail d'équipe.