

Olympiades nationales de mathématiques 2026

Académie de Clermont-Ferrand
Partie académique - 2 heures

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

**Cette deuxième partie est indépendante de la première et peut être réalisée par équipe.
Il est attendu une seule copie par équipe.**

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Cette deuxième partie de l'épreuve contient quatre exercices.

Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 - 2 - 3

Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 1 - 2 - 4.

Les copies abordant de manière significative les trois exercices à traiter seront valorisées.

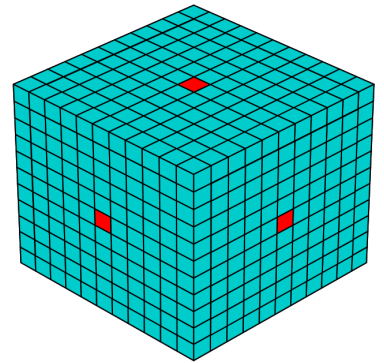


Exercice 1 : Une histoire de blocs

À traiter par tous les candidats

On considère un grand cube construit à l'aide de blocs, qui sont des cubes de taille identique. Ce grand cube est constitué de 11 blocs de long, 11 de large et 11 de haut. On perce ce grand cube pour créer trois tunnels d'un bloc de section, traversant le centre de chaque face :

- Un tunnel qui va de gauche à droite, traversant le centre de chaque face latérale.
- Un tunnel qui va de l'avant à l'arrière, traversant le centre de chaque face avant et arrière.
- Un tunnel qui va de haut en bas, traversant le centre de la face supérieure et de la face inférieure.

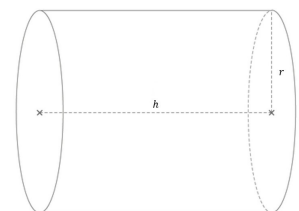


1. Combien de blocs sont restés intacts, c'est-à-dire non touchés par les tunnels, à l'intérieur du grand cube ?
2. Pour un cube de taille $n \times n \times n$ (où n est un nombre entier impair), proposez une formule générale qui donne le nombre de blocs intacts.
3. On généralise à nouveau le problème. Le cube est toujours de taille $n \times n \times n$ (n entier naturel impair), mais cette fois-ci, les trois tunnels percés ont une section carrée de côté k , où k est un entier impair tel que $1 \leq k \leq n$. Les tunnels sont toujours centrés par rapport aux faces du cube. Déterminer, en fonction de n et de k , le nombre de blocs restants dans le cube.

Exercice 2 : L'hiver est rude

À traiter par tous les candidats

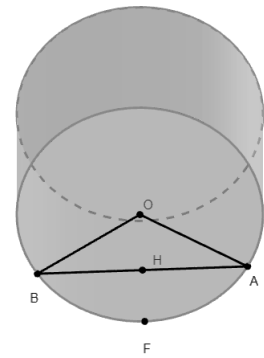
Je viens d'acheter une vieille maison dont le chauffage est encore au fuel. Pour me chauffer cet hiver, je vais devoir passer commande de fuel pour remplir une cuve cylindrique « couchée » qui mesure 1,6 m de diamètre et 3 m de long.



1. Calculer le volume de cette cuve en litres (arrondir à l'unité). On rappelle que le volume V d'un cylindre est égal à $V = \pi r^2 h$, avec r le rayon de la base du disque et h sa hauteur.

Il reste du fuel au fond de la cuve, mais la jauge de volume est cassée. Avec un bâton, j'ai pu mesurer que la hauteur du fuel dans la cuve est actuellement de 40 cm.

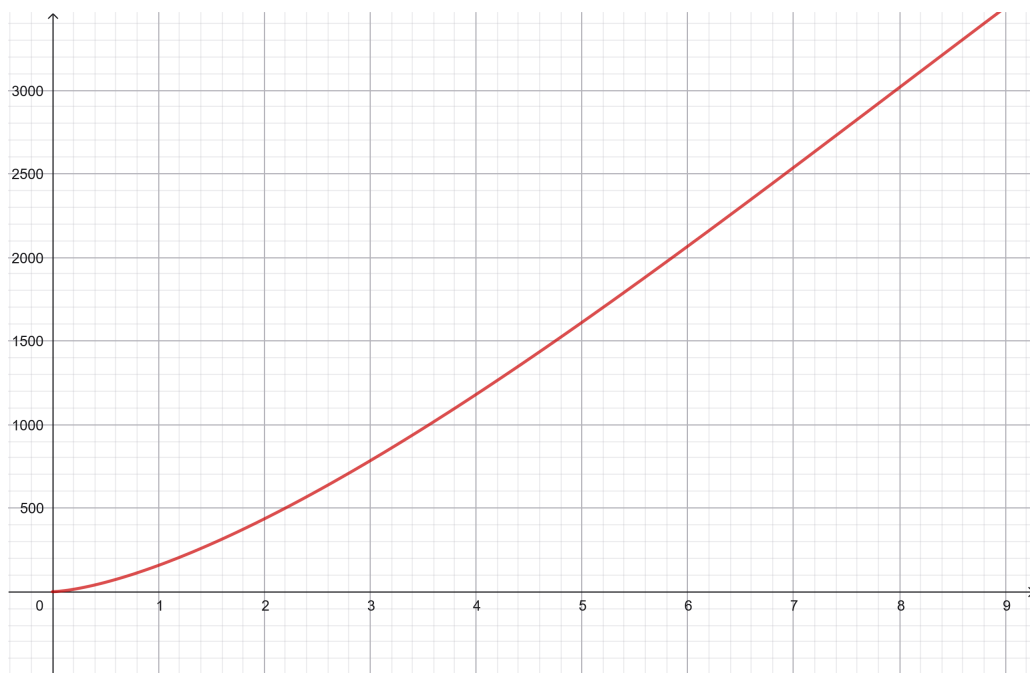
On note O le centre du cercle de base du cylindre. On représente par le segment $[AB]$ la ligne de surface du fuel restant dans la cuve. On note H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB et F le point d'intersection du cercle de base du cylindre et de la droite (OH) .



2. D'après l'énoncé, on sait que $HF = 40$ cm. En déduire OH .
3. Montrer que $\widehat{OAH} = 60^\circ$. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.
4. J'ai besoin de savoir combien va me coûter le remplissage de la cuve. Les fournisseurs autour de chez moi proposent 1000 L pour 1080 €. Combien de litres de fuel faut-il pour remplir cette cuve ? Combien vais-je dépenser pour remplir la cuve ?

On cherche maintenant à graduer un bâton pour obtenir directement le volume de fuel restant dans la cuve. On se restreindra au cas où la quantité de fuel est inférieure à la moitié de la capacité de la cuve.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté le volume restant (exprimé en litre) dans la cuve en fonction de h la hauteur de fuel mesurée dans la cuve et exprimée en dm, avec $0 \leq h \leq 8$.



5. On modélise le bâton par un rectangle. Après avoir reproduit ce rectangle à l'aide d'une échelle bien choisie et en utilisant le graphique, déterminer à quelle hauteur environ je dois porter sur mon bâton les graduations $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ pour connaître la proportion de fuel restant dans la cuve.



Exercice 3 : Racine de 5

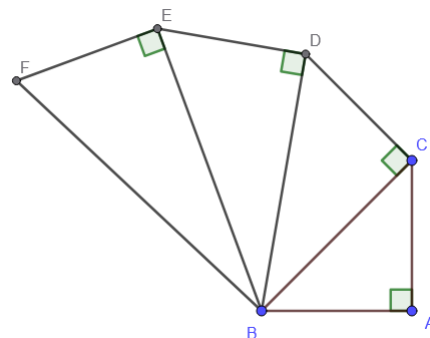
À traiter uniquement par les candidats suivant l'enseignement de spécialité Mathématiques de la voie générale.

Partie A : Approximation géométrique de $\sqrt{5}$

Construction n°1

On se donne un segment $[AB]$ de longueur unité, c'est-à-dire $AB = 1$. On construit alors la figure suivante :

- Le triangle ABC isocèle et rectangle en A , avec $AB = AC = 1$.
- Le triangle CBD rectangle en C et tel que $DC = 1$.
- Le triangle DBE rectangle en D tel que $ED = 1$.
- Le triangle EBF rectangle en E tel que $EF = 1$.



1. Calculer la longueur BF.
2. Construire précisément, en vraie longueur, un segment de longueur $\sqrt{5}$. On laissera les traits de construction apparents.

Construction n°2

Soit x un nombre strictement positif.

On s'intéresse cette fois au demi-cercle de diamètre $[AB]$ obtenu à partir d'un segment $[AH]$ de longueur 1 et le point B de la demi-droite $[AH)$ tel que $B \notin [AH]$ et $HB = x$.

On trace la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par H et on appelle D le point d'intersection entre cette droite et le demi-cercle de diamètre $[AB]$.

3. Exprimer la longueur AB en fonction de x .
4. Justifier que $DH = \sqrt{x}$.
5. Construire précisément en vraie longueur un autre segment de longueur $\sqrt{5}$ en utilisant cette méthode. On laissera les traits de construction apparents.



Partie B : $\sqrt{5}$, nombre irrationnel

6. (a) En justifiant, encadrer $\sqrt{5}$ par 2 nombres entiers, puis deux nombres décimaux à 10^{-1} près.
(b) Déterminer un encadrement de $\sqrt{5}$ à 10^{-2} près, en explicitant les étapes, puis 10^{-3} près (pas de justification attendue cette fois-ci).
7. On souhaite montrer que $\sqrt{5}$ est irrationnel, c'est-à-dire qu'il est impossible de l'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{m}{n}$, avec m et n entiers relatifs (n non nul).

On raisonne par l'absurde.

Supposons que $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$ avec m et n entiers relatifs (n non nul), de sorte que la fraction $\frac{m}{n}$ soit irréductible, donc non simplifiable.

(a) Justifier que 5 divise m^2 .

(b) Soit a un nombre entier positif. Recopier et compléter le tableau suivant :

Chiffre des unités de a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de a^2										

(c) En déduire que 5 divise m . Cela signifie que m peut s'écrire sous la forme $m = 5m'$, avec m' un nombre entier.

(d) En utilisant à nouveau la question (b), justifier que 5 divise n .

(e) Mettre en évidence une contradiction avec l'hypothèse initiale qui était :

$$\sqrt{5} = \frac{m}{n} \text{ est une fraction irréductible avec } m \text{ et } n \text{ entiers } (n \text{ non nul}).$$

Conclure.

Partie C : Approximation de $\sqrt{5}$ par des nombres rationnels

Les mathématiciens mésopotamiens étaient habiles à développer des procédures algorithmiques, parmi lesquels un processus de calcul de racine carrée, souvent attribué à une époque moins ancienne. La méthode décrite ici est parfois attribuée au savant grec Archytas (428-365 avant J.-C.) ou à Héron d'Alexandrie (vers 100 après J.-C.), ou on parle encore d'algorithme de Newton.

Soit $a \geq 0$ un nombre réel. On cherche à approcher $\sqrt{a}$.

On définit la suite numérique $(x_n)_{(n \geq 0)}$ de la façon suivante :

$$x_0 > 0 \text{ (donné) et, pour tout } n \geq 0, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

8. Dans cette question uniquement, on prend $a = 5$ et $x_0 = 3$. Calculer x_1, x_2, x_3 et donner des valeurs approchées à 10^{-6} près de ces 3 nombres. Comparer avec $\sqrt{5}$ dont une valeur approchée à 10^{-6} près est 2,236068.

9. On souhaite montrer que $x_n > 0$ pour tout entier naturel n .

Par hypothèse, x_0 est positif. Supposons que $x_n > 0$ pour un certain rang n .

Justifier qu'alors x_{n+1} est aussi strictement positif.

On admet que de cette façon (il s'agit d'un raisonnement *par récurrence*, on a démontré tous les x_n sont strictement positifs.

10. Soit $n \geq 0$ un entier. On suppose dans cette question que $x_0 \geq \sqrt{a}$.

(a) Justifier que si $x_n > \sqrt{a}$ pour un certain entier n , alors $x_{n+1} - \sqrt{a} > 0$, c'est-à-dire $x_{n+1} > \sqrt{a}$.

Ceci montre (par un principe de récurrence) que si $x_0 > \sqrt{a}$, alors $x_n > \sqrt{a}$ pour tout entier naturel n .

(b) Déterminer le signe de $x_{n+1} - x_n$ pour tout n et en déduire le sens de variation de la suite (x_n) .

On donne les définitions et propriétés suivantes :

Définitions :

- Une suite (x_n) de nombres réels est dite minorée s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n , $m \leq x_n$.
- Une suite (x_n) de nombres réels est dite majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n , $x_n \leq M$.
- On dit qu'une suite (x_n) de nombres réels converge vers une limite L lorsqu'à partir d'un certain rang n les termes de la suite sont aussi proches que l'on veut du nombre L .

On admet le théorème suivant (*Théorème de convergence monotone*) :

Soit (x_n) une suite de nombres réels :

- Si (x_n) est croissante et majorée, alors elle converge.
- Si (x_n) est décroissante et minorée, alors elle converge.

(c) Justifier que la suite (x_n) converge. On appellera L sa limite.

On admet que si $x_0 < \sqrt{a}$, la suite (x_n) converge également.

11. Justifier que la limite L définie précédemment doit vérifier l'égalité :

$$L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{a}{L} \right)$$

12. En déduire la valeur de la limite L de la suite (x_n) .

Partie D : Autre approximation de $\sqrt{5}$ par des fractions continues

13. (a) Simplifier au maximum chaque quotient :

$$A_1 = 2 + \frac{1}{2} \quad A_2 = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}} \quad A_3 = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}} \quad A_4 = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}}$$

On a ainsi défini une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Écrire sous forme de fraction A_5 , le cinquième terme de cette suite.

(c) Donner des valeurs décimales approchées de chaque fraction (de A_1 à A_5), puis comparer à $\sqrt{5}$.

(d) Essayons de justifier la conjecture précédente :

On remarque que :

$$A_1 = 2 + \frac{1}{2} \quad A_2 = 2 + \frac{1}{2 + \left(2 + \frac{1}{2} \right)}$$

$$A_3 = 2 + \frac{1}{2 + 2 + \frac{1}{2 + 2 + \frac{1}{2}}} \quad A_4 = 2 + \frac{1}{2 + 2 + \frac{1}{2 + 2 + \frac{1}{2 + 2 + \frac{1}{2}}}}$$

On note

$$x = 2 + \frac{1}{2 + 2 + \frac{1}{2 + 2 + \frac{1}{2 + 2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

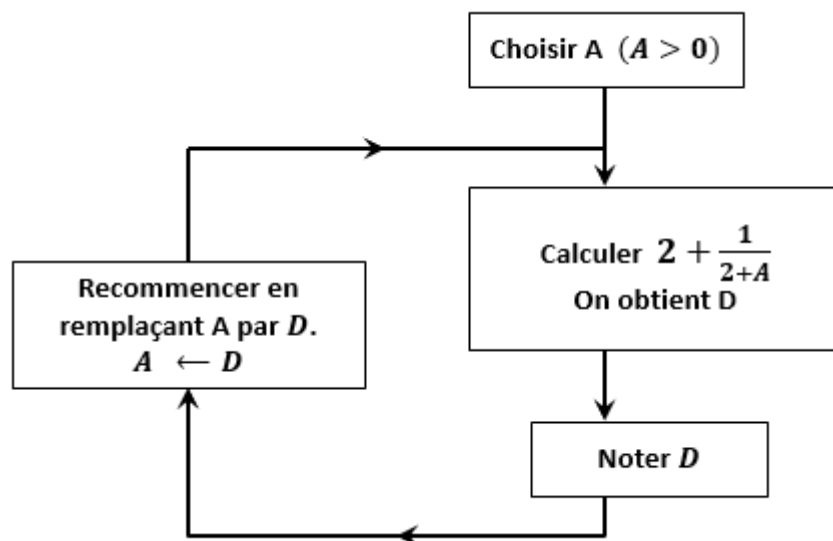
Justifier que

$$x = 2 + \frac{1}{2 + x}$$

On dit que cette écriture est le *développement en fraction continue* de x .

14. Résoudre l'équation précédente d'inconnue x et conclure.

15. On donne l'organigramme suivant :



(a) Faire fonctionner cet organigramme en recopiant et remplissant le tableau ci-dessous :

Choisir A	A	$D = 2 + \frac{1}{2 + A}$

(b) Faire le lien avec ce qui précède.

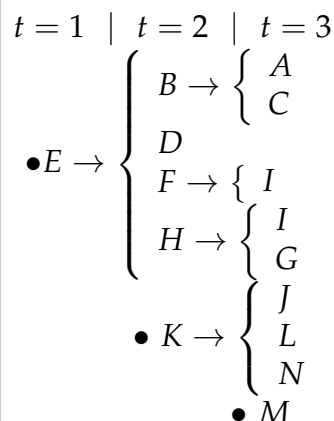
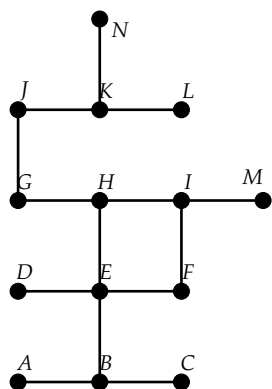
Exercice 4 : Le bouquet final du feu d'artifice

À traiter uniquement par les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité Mathématiques de la voie générale.

Un artificier veut mettre à feu le plus rapidement possible tous les artifices qui lui restent au sol. Certains artifices sont reliés entre eux par des mèches. Lorsque l'artificier met à feu un artifice, les artifices adjacents sont allumés automatiquement à l'instant suivant. Les artifices adjacents suivants seront aussi mis à feu automatiquement à l'instant d'après, et ainsi de suite.

Exemple : Prenons la disposition d'artifices ci-dessous où $A, B, \dots, N$ sont les artifices.

Si l'artificier met à feu l'artifice E au temps $t = 1$, au temps $t = 2$ les artifices B, D, F et H sont aussi mis à feu. De plus, toujours au temps $t = 2$, l'artificier peut allumer en parallèle un deuxième artifice, par exemple K . Au temps $t = 3$, les artifices A, C, G et I sont mis à feu par propagation du premier feu, les artifices J, L et N sont mis à feu par propagation du deuxième feu parti de K , et l'artificier peut allumer un troisième feu en M .



Ainsi, en mettant à feu les trois artifices comme ceci : $[1 : E ; 2 : K ; 3 : M]$, l'artificier aura allumé tous les artifices en trois temps. La liste $[1 : E ; 2 : K ; 3 : M]$ sera appelée liste d'artifice.

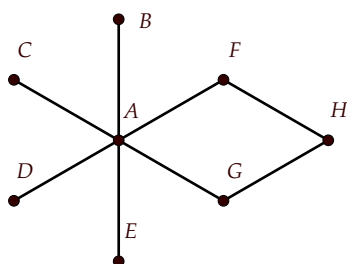
Remarque :

- Un artifice peut être déclenché à plusieurs reprises, soit à des moments différents, soit simultanément. Par exemple, l'artifice I est mis à feu deux fois grâce à la propagation des feux provenant de H et de F .
- Les artifices E, A, B, C, D, F, G, H et I ont finalement été mis à feu grâce à l'action de l'artificier au temps 1.

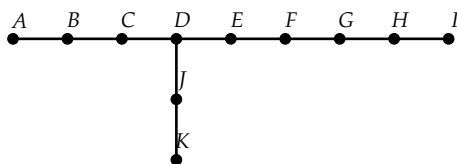
Sauf mention du contraire, toute réponse devra être justifiée

Quelques exemples

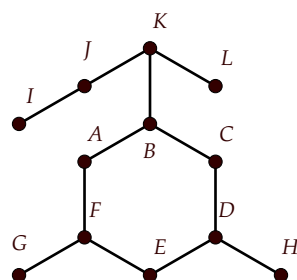
Exemple 1 :



Exemple 2 :



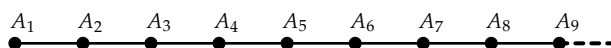
Exemple 3 :



1. Donner une liste d'artifice qui permet de mettre à feu l'ensemble des artifices en deux temps pour l'exemple 1 et en trois temps pour les exemples 2 et 3.
2. L'affirmation " Pour être le plus rapide, l'artificier doit toujours commencer par l'artifice qui a le plus de voisins" est-elle vraie ?

Le cas des lignes

Dans cette partie, on s'intéresse au cas où les artifices sont placés et reliés en ligne :



3. Dans cette question, on s'intéresse au cas d'une ligne de 9 artifices nommés $A_1, A_2, A_3, \dots, A_9$.
Sans justifier, donner une liste d'artifices la plus petite possible permettant de mettre à feu l'ensemble de la ligne de 9 artifices.
4. Même question pour une ligne de 16 artifices nommés $A_1, A_2, \dots, A_{16}$.
5. Toujours pour une disposition en ligne,
 - (a) À la fin du quatrième temps, quel est le nombre **maximal** d'artifices dont la mise à feu peut être attribuée à l'action de l'artificier au temps 1 ?
 - (b) À la fin du quatrième temps, quel est le nombre **maximal** d'artifices dont la mise à feu peut être attribuée à l'action de l'artificier au temps 2 ?
 - (c) Expliquer pourquoi une ligne de 17 artifices ne peut pas être mise à feu en quatre temps.
6. En cinq temps, quelle est la plus grande ligne d'artifices que l'on peut allumer en entier ?
7. Sans justifier, combien de temps faudra-t-il au minimum pour mettre à feu l'ensemble des artifices d'une ligne de :

(a) 35 artifices	(b) 36 artifices	(c) 37 artifices
------------------	------------------	------------------
8. On dispose d'une ligne d'artifices aussi grande que l'on veut. Soit K un entier supérieur à 4 exprimant le temps de mise à feu.
 - (a)
 - i. À la fin du K -ième temps, exprimer en fonction de K , le nombre **maximal** d'artifices dont la mise à feu peut être attribuée à l'action de l'artificier au temps 1.
 - ii. À l'issue du K -ième temps, exprimer en fonction de K , le nombre **maximal** d'artifices dont la mise à feu peut être attribuée à l'action de l'artificier au temps 2.
 - iii. À l'issue du K -ième temps, donner le nombre **maximal** d'artifices dont la mise à feu peut être attribuée à l'action de l'artificier au temps $K - 1$ (c'est-à-dire l'avant dernière mise à feu).
 - iv. À l'issue du K -ième temps, rappeler le nombre d'artifices dont la mise à feu peut être attribuée à l'action de l'artificier au temps K (c'est-à-dire la dernière mise à feu).
 - (b) Exprimer en fonction de K , le nombre maximal d'artifices mis à feu en K temps dans une disposition "ligne" d'artifices. On donnera le résultat sous la forme d'une somme de K termes.
9. On se propose dans cette question de démontrer que la somme des K premiers entiers impairs est égale à K^2 . Notons $S_K = 1 + 3 + 5 + \dots + (2K - 1)^*$ que l'on peut aussi écrire dans l'autre sens $S_K = (2K - 1) + \dots + 5 + 3 + 1$.
* On rappelle que le K -ième nombre impair est $2K - 1$

- (a) En ajoutant terme à terme les deux écritures de S_K , déterminer une valeur simplifiée de $S_K + S_K$.
- (b) En déduire que $S_K = K^2$.
10. À l'aide des deux questions précédentes, compléter sans justifier la phrase "En K temps, l'artificier ne pourra pas mettre à feu une ligne contenant strictement plus de ... artifices"
11. On s'intéresse à une ligne de N artifices où N est un carré parfait. On note $K = \sqrt{N}$.
- (a) Soit i un entier compris entre 1 et $K - 1$. Afin que la propagation des feux ne se chevauche pas, exprimer en fonction de i et K la distance minimale qui doit être mise entre les deux feux allumés aux temps i et $i + 1$.
- (b) Recopier et compléter l'algorithme suivant permettant de mettre à feu la totalité de la ligne de taille N en K temps :

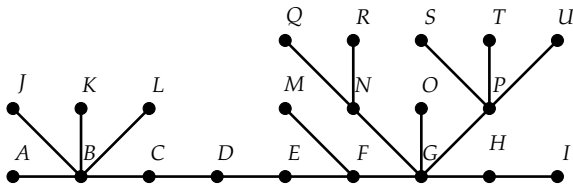
```

n ← K
Pour i allant de 1 à K
    Mettre à feu l'artifice numéro n
    n ← .....
  
```

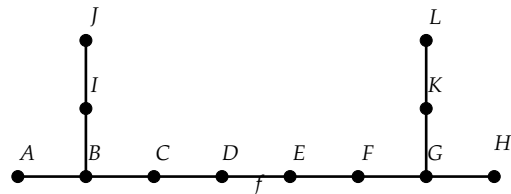
D'autres exemples

12. Parmi les exemples suivants, lesquels ne peuvent pas être mis à feu en trois temps seulement. Une justification est demandée.

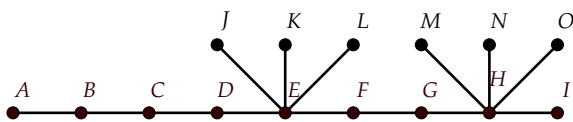
Exemple 4 :



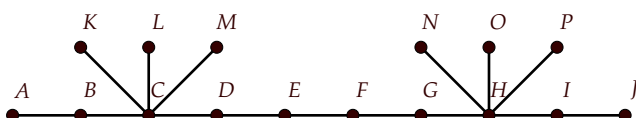
Exemple 7 :



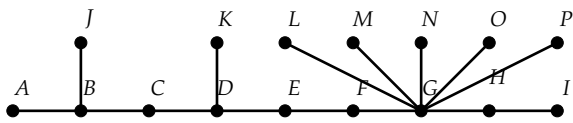
Exemple 5 :



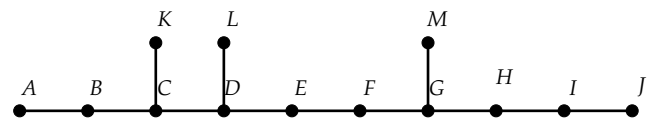
Exemple 6 :



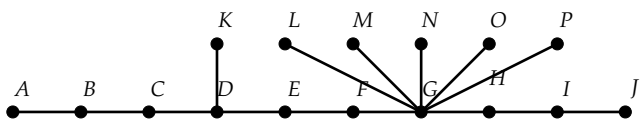
Exemple 8 :



Exemple 10 :



Exemple 9 :



Exemple 11 :

